



SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

— ACADEMIA —
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL
UNI



Álgebra

Tema: Tópicos de álgebra

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

academiacesarvallejo.edu.pe

1.- Si $(\alpha; \beta)$ es la solución única del sistema

$$\begin{cases} 9x + 4y = -4 & \text{Ec. I} \\ 6x - 6y = 19 & \text{Ec. II} \\ 3x + 2by = 5a & \text{Ec. III} \end{cases}$$

determine el valor de $a + b$.

A) 1 B) $5/2$ C) $1/2$ ~~D) $2/5$~~ E) 2

Resolución

Como $(\alpha; \beta)$ es la solución única del sistema

Reemplazamos en ECI, y ECII

$$9\alpha + 4\beta = -4 \xrightarrow{\text{Por 3}} 27\alpha + \cancel{12\beta} = -12 +$$

$$6\alpha - 6\beta = 19 \xrightarrow{\text{Por 2}} \underline{12\alpha - \cancel{12\beta} = 38}$$

$$39\alpha = 26$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \quad \beta = -\frac{5}{2}$$

Reemplazamos en ECIII $3x + 2by = 5a$

$$\rightarrow 3\left(\frac{2}{3}\right) + 2b\left(-\frac{5}{2}\right) = 5a$$

$$\therefore a + b = \frac{2}{5}$$

2.- Si $5x^2 + y^2 + 9z^2 = 4xy + 6xz$, $\{x; y; z\} \in \mathbb{R} - \{0\}$ calcule el valor de

$$S = \frac{(x + 2z)^2 + (x - 2z)^2}{(y + z)^2 - (y - z)^2} = \frac{2(x^2 + 4z^2)}{4yz}$$

A) 1 B) 2 C) 13/12 D) 12/13 E) 1/2

Resolución

Buscamos trinomios cuadrados perfectos

$$5x^2 + y^2 + 9z^2 = 4xy + 6xz$$

$$\underline{4x^2 - 4xy + y^2} + \underline{x^2 - 6xz + 9z^2} = 0$$

$$(2x - y)^2 + (x - 3z)^2 = 0$$

como $\{x; y; z\} \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$2x - y = 0 \longrightarrow y = 2x; \quad y = 6z;$$

$$x - 3z = 0 \longrightarrow x = 3z;$$

Reemplazando en S

$$S = \frac{2(9z^2 + 4z^2)}{24z^2} = \frac{13}{12}$$

3.- Se define el polinomio cuadrático $k(x)$ que cumplen las siguientes condiciones

$$\underline{k(0) = 12}; \quad k(1) = 28; \quad k(-1) = 4$$

determine el menor valor que puede adquirir $k(x)$.

- A) 1 B) 12 C) 9 ~~D) 3~~ E) 2

Resolución

Del enunciado

$$k(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

$$k(1) = 28 \longrightarrow a + b + 12 = 28 \longrightarrow a + b = 16$$

$$k(-1) = 4 \longrightarrow a - b + 12 = 4 \longrightarrow \underline{a - b = -8}$$

$$a = 4 \wedge b = 12$$

Luego tendríamos

$$k(x) = 4x^2 + 12x + 12 = 0$$

Completando cuadrados

$$\underbrace{4x^2 + 12x + 9}_{(2x+3)^2} + 3$$

$$k(x) = (2x + 3)^2 + 3 = 0$$

$$\therefore \text{Min. } k(x) = 3 \checkmark$$

$$1) \quad k'(x) = 8x + 12$$

$$2) \quad k'(x) = 0 \Rightarrow 8x + 12 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$3) \quad K_{\min} = k\left(-\frac{3}{2}\right) = 3$$

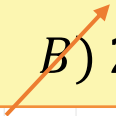
4.- Si se verifica que $P(x) = Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, siendo:

$$P(x) = 3x^3 + nx^2 + 5x$$

$$Q(x) = xf(x) + x^2f(-x)$$

donde $f(x)$ es un polinomio. Calcule n .

A) 1

 B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Resolución

Del enunciado $P(x) = Q(x)$

$$\longrightarrow xf(x) + x^2f(-x) = 3x^3 + nx^2 + 5x$$

$$\text{Sea } f(x) = ax + b$$

$$\longrightarrow x(ax + b) + x^2(-ax + b) = 3x^3 + nx^2 + 5x$$

$$-ax^3 + (a + b)x^2 + bx = 3x^3 + nx^2 + 5x$$

$$\text{Como } P(x) = Q(x)$$

Sus coeficientes respectivos son iguales

$$a = -3$$

$$b = 5$$

$$\longrightarrow a + b = n = 2$$

5.- Determine el valor de $\frac{a}{b}$, si el polinomio $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$; $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, es divisible por el polinomio

$$Q(x) = x^2 + 2kx + k^2; k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

- A) $\frac{3}{4k}$ B) $\frac{1}{3k}$ C) $3k$ D) $\frac{3}{4}k$ E) $\frac{4}{3}k$

Resolución

Se tiene

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$$

Divisible por:

$$Q(x) = 1x^2 + 2kx + k^2$$

Completando $P(x)$

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + 0x^2 + 0x + 1$$

Aplicamos A.D.E

$$\begin{array}{r}
 ax^4 + bx^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\
 \underline{1x^2 + 2kx + k^2} \\
 \hline
 ax^2 + (b-2k)x + (1-k^2)
 \end{array}$$

The diagram shows the following steps:

- ax^4 is divided by $1x^2$ to get ax^2 .
- bx^3 is divided by $1x^2$ to get bx .
- $0x^2$ is divided by $1x^2$ to get 0 .
- $0x$ is divided by $1x^2$ to get 0 .
- 1 is divided by $1x^2$ to get 0 .
- The quotient is $ax^2 + bx + 0 + 0 + 0 = ax^2 + bx$.
- The remainder is $ax^2 + (b-2k)x + (1-k^2)$.
- The remainder is set to zero: $ax^2 + (b-2k)x + (1-k^2) = 0$.
- This gives the system of equations: $a = 0$, $b-2k = 0$, and $1-k^2 = 0$.
- Solving these equations gives $a = 0$, $b = 2k$, and $k = \pm 1$.
- Therefore, $\frac{a}{b} = \frac{0}{2k} = 0$.

$$\bullet \quad -4 \underbrace{k^2}_1 = -a - 1 \longrightarrow a = 3$$

$$\bullet \quad -2k + 2k \underbrace{a}_3 = b \longrightarrow 4k = b$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{4k}$$

6.- El polinomio $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ es divisible por $x^2 - 9$ y al dividir entre $x + 1$, deja un resto de -8 . Halle el valor de $bc + d$.

A) 15 B) 32 ~~C) -36~~ D) 40 E) -25

Resolución

Se tiene $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

- entre $x + 1$ el resto es -8

$$\longrightarrow P(-1) = -8 \longrightarrow b - c + d = -7 \quad \dots \alpha$$

- entre $x^2 - 9$ el resto es 0

$$\text{T. RESTO: } x^2 - 9 = 0 \longrightarrow x^2 = 9$$

$$R(x) = 9x + 9b + cx + d = 0$$

$$(9 + c)x + 9b + d = 0 \quad \begin{cases} c = -9 \\ 9b + d = 0 \end{cases}$$

En α

$$b - (-9) + d = -7 \longrightarrow b + d = -16 \quad \text{---}$$

$$9b + d = 0$$

$$b = 2 \wedge d = -18$$

$$\therefore bc + d = -36$$

7.- Indicar el número de factores primos cuadráticos luego de factorizar el siguiente polinomio

$$P(x; y) = 4x^8 + 4x^6 + x^4y^4 + 4x^4 + y^4 + x^2y^4$$

- A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

Resolución

Agrupando convenientemente

$$P(x; y) = \underline{4x^8} + \underline{4x^6} + \underline{x^4y^4} + \underline{4x^4} + \underline{y^4} + \underline{x^2y^4}$$

$$P(x; y) = 4x^4(\underline{x^4 + x^2 + 1}) + y^4(\underline{x^4 + x^2 + 1})$$

$$(2x^2 + y^2)^2$$

$$(2xy)^2$$

$$P(x; y) = \underline{(x^4 + x^2 + 1)} (4x^4 + 4x^2y^2 + y^4 - 4x^2y^2) \\ (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\therefore P(x; y) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$(2x^2 + y^2 - 2xy)(2x^2 + y^2 + 2xy)$$

Se tiene 4 factores primos

8.- Dar la suma de los factores primos del siguiente polinomio

$$P(x) = 10x^3 - 3x^2 - 6x - 1$$

A) $5x + 2$ B) $7x + 2$ C) $8x + 1$ D) $8x + 2$ E) $9x + 2$

Resolución

Aplicamos los divisores binomios:

	10	-3	-6	-1
$x = -\frac{1}{2}$	↓	-5	4	1
	10	-8	-2	0

$$(x + \frac{1}{2})(10x^2 - 8x - 2)$$

$$\rightarrow P(x) = (2x + 1)(5x^2 - 4x - 1)$$

$$\begin{array}{rcl} 5x & \nearrow & +1 \\ x & \searrow & -1 \end{array}$$

$$P(x) = (2x + 1)(5x + 1)(x - 1)$$

Factores Primos: $(2x + 1) +$
 $(5x + 1)$
 $(x - 1)$

 $(8x + 1)$

9.- Con respecto a la inecuación

$$2x^3 - 21x^2 + 52x - 21 \leq 0$$

Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de los siguientes enunciados.

- I. El número de soluciones enteras positivas es 5
 II. Todos los enteros negativos son soluciones.
 III. Si $a \in \mathbb{R}^+ \cap CS \rightarrow \frac{1}{a} \in CS$.

A) FFF B) FFV C) FVV D) VFF E) VVF

Resolución

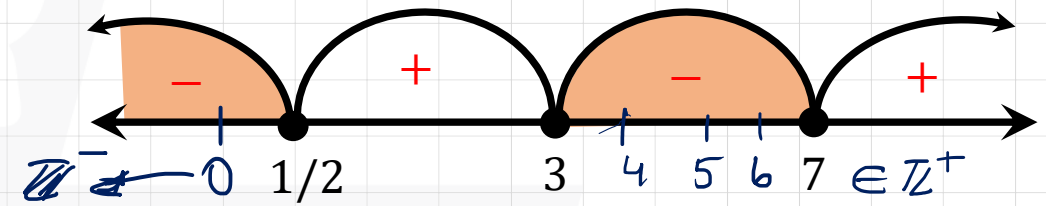
Aplicamos los divisores binomios:

	2	-21	52	-21
$x = 7$	↓	14	-49	21
	2	-7	3	0

$$\rightarrow (x - 7)(2x^2 - 7x + 3) \leq 0$$

$$\begin{array}{l} 2x \rightarrow -1 \\ x \rightarrow -3 \end{array}$$

$$(x - 7)(2x - 1)(x - 3) \leq 0 \quad \text{Punto críticos: } 1/2, 3, 7$$



$$\therefore CS = \langle -\infty; 1/2 \rangle \cup [3; 7]$$

Del conjunto solución se tiene:

- 5 soluciones enteras V
- Todos los enteros negativos son soluciones V
- Sea $a = 1/10 \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \frac{1}{a} \in C.S$ F

— ACADEMIA —

CÉSAR

VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:   

academiacesarvallejo.edu.pe